

## CINEMÁTICA VETORIAL

Na cinemática escalar, estudamos a descrição de um movimento através de grandezas escalares. Agora, veremos como obter e correlacionar as grandezas vetoriais descritivas de um movimento, mesmo que não conheçamos a trajetória do móvel.

Como vimos em vetores, existem grandezas escalares e vetoriais.

### Grandezas Escalares

São definidas por seus valores numéricos acompanhados das respectivas unidades de medida. Exemplos: massa, temperatura e volume,

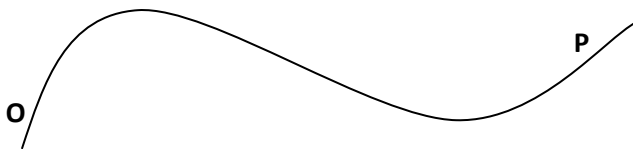
### Grandezas vetoriais

Além do valor numérico e da unidade de medida, necessitam para serem caracterizadas de uma direção e um sentido. Exemplos: deslocamento, velocidade, aceleração, e força.

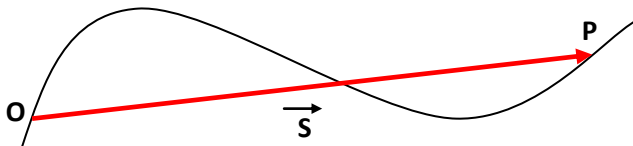
Sendo assim, vamos agora analisar as grandezas vistas anteriormente na cinemática escalar, dando as mesmas uma visão vetorial.

### Vetor posição ( $\vec{S}$ )

Observe a trajetória a seguir com origem O. Pode-se considerar P a posição de certo ponto material, em um instante t.



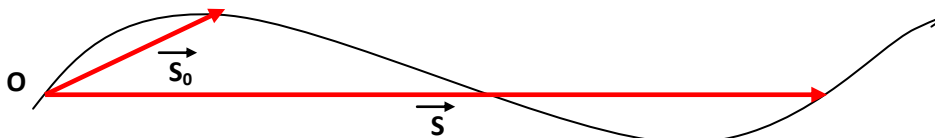
O vetor posição definido por  $\vec{S}$ , no instante t, é um vetor de origem O e extremidade P. Esse vetor tem o objetivo de caracterizar a posição P do móvel em um determinado instante t.

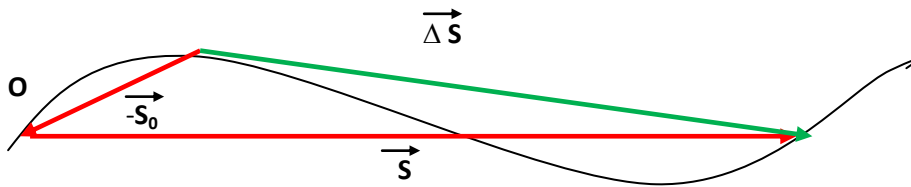


### Vetor deslocamento ( $\vec{\Delta S}$ )

Na cinemática escalar vimos que  $\Delta S = S - S_0$ , com base nessa relação, definimos  $\vec{\Delta S}$  como sendo a soma vetorial do vetor posição final com o inverso do vetor posição inicial, observe:

$$\vec{\Delta S} = \vec{S} + (-\vec{S}_0)$$





Como se pode observar na figura, o vetor deslocamento é então o vetor resultante, determinado graficamente pela regra do polígono, como sendo o vetor com origem na posição inicial  $S_0$  e extremidade na posição final  $S$ .

De forma prática, podemos então afirmar que o vetor deslocamento é um vetor que “liga” a posição inicial com a posição final do móvel.

## Vetor velocidade

### 1) velocidade vetorial instantânea ( $\vec{V}$ )

Quando o intervalo de tempo propende a zero, a velocidade vetorial média tende a um limite que é denominado velocidade vetorial instantânea podendo ser representada pela função:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_m$$

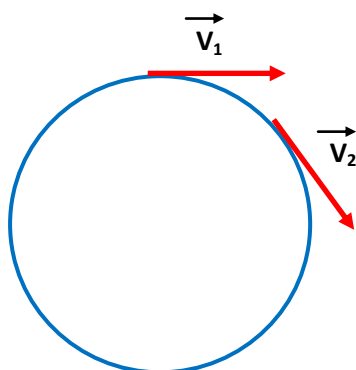
Para defini-la (como para qualquer grandeza vetorial), devemos analisar seu módulo, sua direção e seu sentido.

**Módulo:** o mesmo da velocidade escalar instantânea.

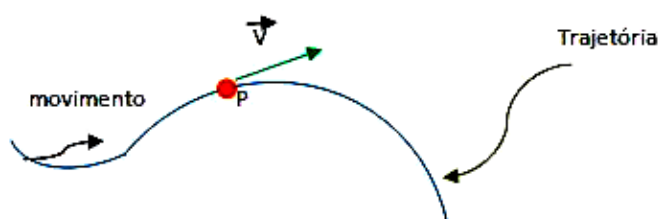
Por exemplo, quando dizemos que em certo instante a velocidade de um carro é de 35m/s, o vetor velocidade instantânea tem módulo de 35m/s.

**Direção:** tangente à trajetória

Observe a trajetória circular abaixo. Em cada instante, o vetor velocidade tangencia a trajetória.



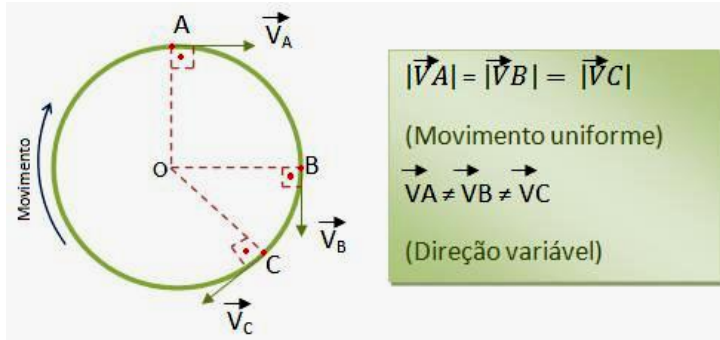
**Sentido:** o mesmo do movimento



Obs:

a) É importante lembrarmos que a velocidade vetorial instantânea, pode ser chamada apenas de velocidade vetorial.

b) Lembre-se ainda que um vetor varia quando varia qualquer um dos seus elementos (módulo, direção, sentido). Desse modo, se um móvel descreve uma curva, mesmo que o módulo da velocidade seja constante, sua velocidade vetorial já está variando, pois em cada ponto da curva da velocidade vetorial tem uma direção.



c) A velocidade vetorial, será constante, quando o móvel do objeto, estiver em repouso, ou até mesmo em movimento retilíneo e uniforme.

Partícula em repouso: que é quando a velocidade vetorial é sempre nula.

Partícula em movimento retilíneo e uniforme: para que a velocidade vetorial seja constante e diferente de zero, ela deve ser constante em módulo, que é o movimento uniforme, e em orientação, que é a trajetória retilínea.

## 2-velocidade vetorial média ( $\vec{v}_m$ )

Numa trajetória qualquer, a velocidade vetorial média é definida pela razão entre o vetor deslocamento e o correspondente intervalo de tempo, cujo módulo é dado por:

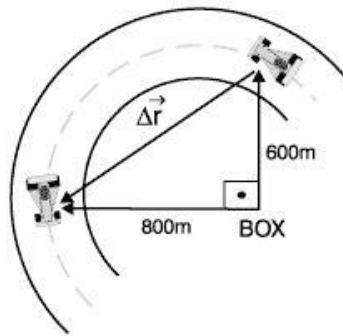
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

A direção e o sentido do vetor velocidade média, são os mesmos do vetor deslocamento.

**Exercício resolvido:**

Num instante  $t_1$ , um carro de Fórmula 1 encontra-se a 600m ao norte em relação ao box de sua equipe e, 20s depois, a 800m a oeste do mesmo referencial. Determinar o módulo do deslocamento vetorial ( $\Delta r$ ) e o módulo da velocidade vetorial média do carro ( $v_m$ ) entre esses dois instantes.

**Solução:**



Como o vetor deslocamento vai da posição inicial a posição final, de acordo com a figura, seu módulo é determinado pelo teorema de Pitágoras.

$$\Delta r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{600^2 + 800^2} = 1.000m$$

O módulo da velocidade vetorial média é:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1000}{20} = 50m/s$$

Podemos perceber que :

$$|\Delta s| \geq |\vec{d}|$$

$$\frac{|\Delta s|}{\Delta t} \geq \frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$$

Ou seja:

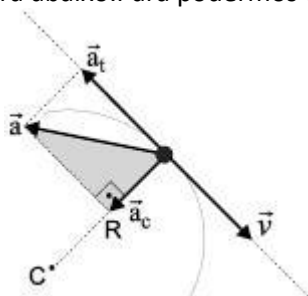
$$|v_m| \geq |\vec{v}_m|$$

A partir das funções ao lado, podemos perceber que a velocidade escalar média, tem o módulo maior ou igual ao da velocidade escalar vetorial média.

## ACELERAÇÃO VETORIAL INSTANTÂNEA ( $\vec{a}$ )

É a aceleração vetorial de um móvel em um determinado instante em cada ponto de sua trajetória.

A aceleração vetorial instantânea possui duas componentes, a aceleração tangencial e a aceleração centrípeta, podendo ser obtida pela soma vetorial dessas componentes conforme a figura abaixo. Para podermos entendê-la melhor, vamos primeiro conhecer estes dois vetores.



### 1) Aceleração tangencial ( $\vec{a}_t$ )

**Função:** variar o módulo do vetor velocidade

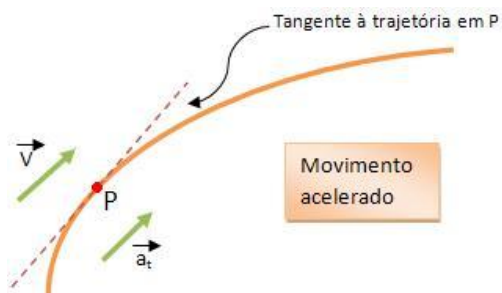
**Módulo:** o mesmo da aceleração escalar

$$a_t = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

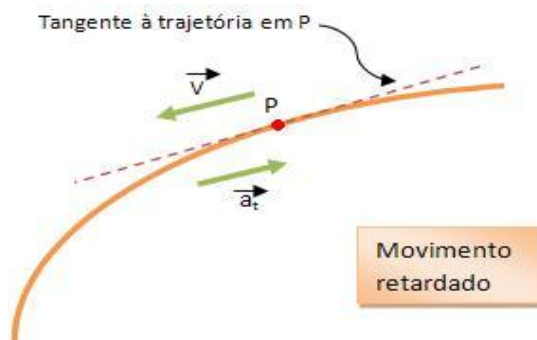
**Direção:** tangente a trajetória (paralela à velocidade vetorial)

**Sentido:**

a) o mesmo do movimento (do vetor velocidade) para movimentos acelerados



b) oposto ao do movimento (oposto ao vetor velocidade) para movimentos retardados.



**Importante:**

Em movimentos uniformes, a aceleração vetorial instantânea  $\vec{a}_t$  é nula, já que o módulo de  $\vec{v}$

não varia nesses movimentos.

## 2) Aceleração centrípeta ou normal ( $\vec{a}_c$ )

**Função:** variar a direção do vetor velocidade ( $\vec{v}$ ).

**Módulo:** dado por

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

**Direção:** perpendicular a trajetória (perpendicular a velocidade vetorial)



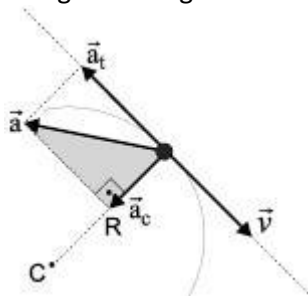
**Sentido:** voltado para o centro da trajetória (por isso, centrípeta)

**Importante:**

- a) Nos movimentos retilíneos, a aceleração centrípeta é nula porque o móvel não muda de direção, podemos então dizer que a velocidade vetorial apresenta uma direção constante
- b) Sempre que o móvel estiver em repouso, sua aceleração centrípeta, será nula.

Agora que conhecemos as suas componentes, podemos definir melhor a aceleração vetorial instantânea. Como podemos notar, a sua função é variar o módulo e/ou a direção do vetor velocidade.

A intensidade da aceleração resultante pode ser feita aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em destaque na figura:



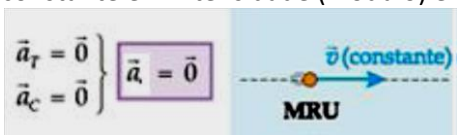
$$a^2 = a_t^2 + a_c^2$$

### Análise vetorial de movimentos

Com base no que foi visto, vamos agora identificar a aceleração vetorial em certos tipos de movimento e sua orientação com o vetor velocidade

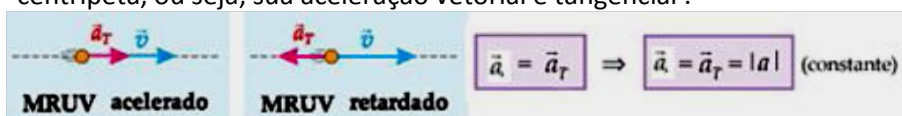
#### 1-Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.)

É o único movimento que não possui aceleração vetorial, pois sua velocidade se mantém constante em intensidade (módulo) e em direção (trajetória retilínea).



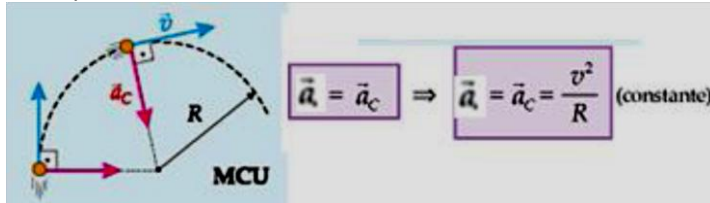
#### 2-Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)

A velocidade varia apenas em módulo, pois, sendo a trajetória retilínea, não possui aceleração centrípeta, ou seja, sua aceleração vetorial é tangencial.



### 3-Movimento Circular Uniforme(M.C.U.)

Por ser um movimento uniforme, o módulo da velocidade é constante logo, não possui aceleração tangencial. Entretanto, como a trajetória é circular, sua velocidade varia em direção, ou seja, sua aceleração centrípeta é diferente de zero, a aceleração vetorial é centrípeta



### 4-Movimento Circular Uniformemente Variado (M.C.U.V.)

Como a velocidade variar tanto em intensidade quanto em direção, esse movimento possui aceleração tangencial e aceleração centrípeta, sendo a aceleração vetorial do movimento a resultante das duas ou seja:  $a^2 = a_t^2 + a_c^2$



Fontes das imagens deste tópico: cinemática vetorial- Bosco Guerra

### Exercício resolvido

01. (PUC-SP) Um móvel parte do repouso e percorre uma trajetória circular de raio 100m, em movimento acelerado uniformemente, de aceleração escalar igual  $1\text{m/s}^2$ . Calcule, após 10s, as componentes tangencial e centrípeta da aceleração.

#### Solução:

$$v_0 = 0; a = 1\text{m/s}^2 \text{ (constante); } t = 10\text{s}$$

O módulo de  $a_t$  é igual ao de  $a$ , então:

$$a_t = a = 1\text{m/s}^2$$

O módulo de  $a_c$  vale:

$$v = v_0 + at = 0 + 1 \times 10 \therefore v = 10\text{m/s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{100} = 1\text{m/s}^2$$

## ACELERAÇÃO VETORIAL MÉDIA ( $\vec{a}_m$ )

### Módulo:

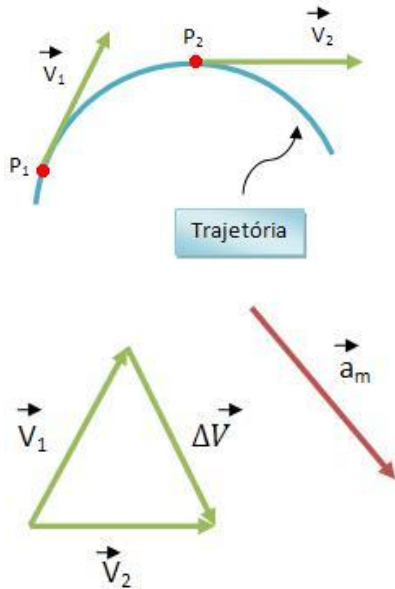
A aceleração média é o quociente que está entre a variação da velocidade vetorial e o intervalo de tempo desta variação.

### Vejam os:

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

### Direção e sentido:

A mesma direção e o mesmo sentido da variação de velocidade vetorial, já que o tempo é sempre positivo.





## Exercícios

**01.** Em que movimentos permanece constante:

- a) o módulo da velocidade vetorial;
- b) a direção de velocidade vetorial;
- c) a velocidade vetorial.

**02.** (FATEC) Um automóvel percorre 6,0km para o norte e, em seguida 8,0km para o leste. A intensidade do vetor posição, em relação ao ponto de partida é:

- a) 10 km
- b) 14 km
- c) 2,0 km
- d) 12 km
- e) 8,0 km

**03.** Considere uma partícula descrevendo uma trajetória circular. O vetor posição associado ao movimento da partícula:

- a) será constante;
- b) terá módulo necessariamente constante;
- c) somente terá módulo constante se a origem do sistema de coordenada for o centro da circunferência;
- d) somente terá módulo constante se a origem do sistema de coordenadas pertencer a uma reta normal ao plano da trajetória e passando pelo centro da circunferência descrita;
- e) será nulo.

**04.** (OSEC) Um móvel percorre uma trajetória circular de 1,00 metro de raio. Após percorrer um quarto de circunferência, o deslocamento do móvel é, aproximadamente:

- a) 1,00m
- b) 1,41m
- c) 3,14m
- d) 6,28m
- e) n.d.a.

**05.** (MACKENZIE) Um corpo é atirado verticalmente para cima a partir do solo com velocidade inicial de módulo 50 m/s. O módulo de sua velocidade vetorial média entre o instante de lançamento e o instante em que retorna ao solo é:

- a) 50 m/s
- b) 25 m/s
- c) 5,0 m/s
- d) 2,5 m/s
- e) zero

**06.** (PUC - RS) As informações a seguir referem-se a um movimento retilíneo realizado por um objeto qualquer.

- I. A velocidade vetorial pode mudar de sentido.
- II. A velocidade vetorial tem sempre módulo constante.
- III. A velocidade vetorial tem direção constante.

A alternativa que representa corretamente o movimento retilíneo é:

- a) I, II e III
- b) Somente III
- c) Somente II
- d) II e III
- e) I e III

**07.** Considere uma partícula em movimento.

A respeito de sua velocidade vetorial (instantânea) assinale a opção falsa:

- a) tem direção **sempre** tangente à trajetória;
- b) tem sentido **sempre** concordante com o sentido do movimento;
- c) tem intensidade **sempre** igual ao valor absoluto da velocidade escalar (instantânea);
- d) somente é constante se o movimento for retilíneo e uniforme;
- e) é constante no movimento circular e uniforme.

**08.** Considere uma partícula em movimento circular e uniforme.

Assinale a opção falsa:

- a) a velocidade escalar é constante;
- b) a velocidade vetorial tem módulo igual ao da velocidade escalar;
- c) a velocidade vetorial tem módulo constante;
- d) a velocidade vetorial é variável;
- e) a velocidade vetorial média e a velocidade escalar média têm módulos iguais.

**09.** Em um movimento com trajetória retilínea podemos afirmar:

- a) a aceleração tangencial será nula;
- b) a aceleração tangencial terá mesmo sentido da velocidade vetorial;
- c) a aceleração tangencial terá sempre o mesmo sentido;
- d) a aceleração tangencial, suposta não nula, terá sempre a mesma direção;
- e) a aceleração tangencial será constante.

**10.** (UFPA) Uma partícula percorre, com movimento uniforme, uma trajetória não retilínea. Em cada instante teremos que:

- a) Os vetores velocidade e aceleração são paralelos entre si;
- b) A velocidade vetorial é nula;
- c) Os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares entre si;
- d) Os vetores velocidade e aceleração têm direções independentes;
- e) O valor do ângulo entre o vetor velocidade e o vetor aceleração muda de ponto a ponto.

### Gabarito

**01 - a)** O módulo da velocidade vetorial é igual ao da velocidade escalar e será constante se o movimento for uniforme.

**b)** A velocidade vetorial terá direção constante se a trajetória for retilínea.

**c)** Para a velocidade vetorial ser constante ela deve ser todas as suas características constantes e, portanto, o movimento deverá ser retilíneo e uniforme.

**02 - A**

**03 - D**

**04 - B**

**05 - E**

**06 - E**

**07 - E**

**08 - E**

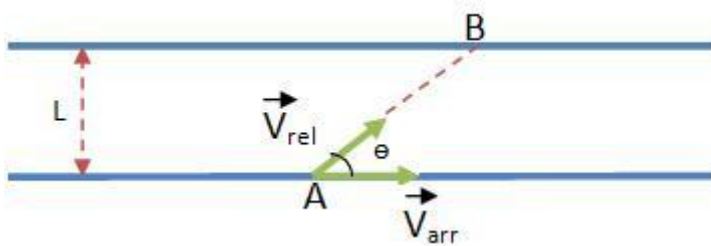
**09 - D**

**10 - C**

## Princípios de Galileu ou da independência dos movimentos

O princípio de independência dos movimentos de Galileu traz este nome, pois, quando um corpo apresenta, em relação a um observador, um movimento em duas ou mais direções, esses dois movimentos podem ser analisados separadamente, ou seja, o movimento em cada direção ocorre de maneira independente sem que um influencie no outro. Estes movimentos porém possuem algo em comum, o fato de apresentarem a mesma duração (ocorrem no mesmo intervalo de tempo).

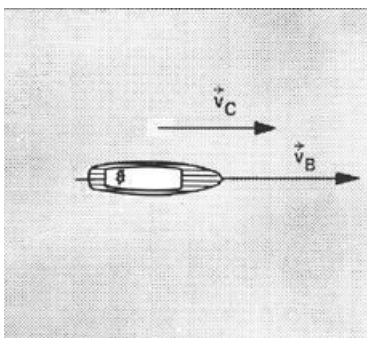
Vejam um exemplo:



No exemplo acima, podemos considerar um barquinho se movimentando em um rio. Observe que se não houvesse correnteza, a velocidade do barquinho em relação a um observador parado na margem, seria  $V_B$ , porém, com a correnteza, o movimento do barco em relação a este observador seria uma composição do movimento do rio e do próprio barco, de forma que em relação a este observador, o barco apresentaria uma velocidade resultante diferente da velocidade do barco, o que pode ser observado nos exemplos abaixo.

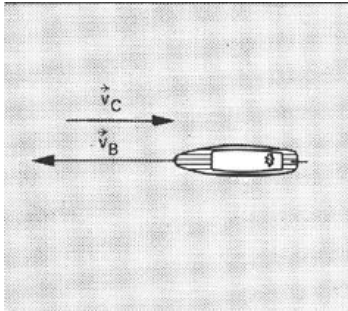
a) Barco se movimentando a favor da correnteza.

Seja  $\vec{v}$  a velocidade do barco em relação ao observador parado na margem,  $\vec{v}_B$  a velocidade do barco e  $\vec{v}_C$  a velocidade da correnteza, podemos observar que a velocidade  $\vec{v}$  é resultante de  $\vec{v}_B$  e  $\vec{v}_C$ , e conforme vimos, quando vetores atuam na mesma direção e mesmo sentido o módulo do vetor resultante é dado pela soma dos módulos dos vetores, então:  $v = v_B + v_C$  (o barco desce o rio mais rapidamente do que desceria se não existisse a correnteza).



b) barco se movimenta contra a correnteza

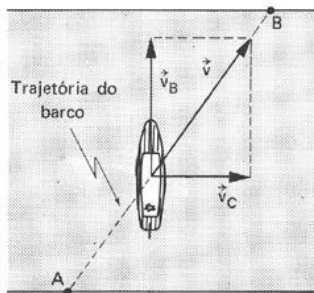
Agora,  $\vec{v}_B$  e  $\vec{v}_C$  possuem sentidos opostos, sendo assim, o módulo da velocidade resultante será:  $v = v_B - v_C$  (o barco gastará mais tempo para subir o rio do que para descer).



c) barco se movimentando perpendicularmente às margens

Neste caso,  $\vec{v}_B$  e  $\vec{v}_C$  são perpendiculares entre si. O barco deslocar-se-á na trajetória AB, como mostra a figura. O módulo da velocidade resultante será determinada pelo Teorema de Pitágoras):

$$v = \sqrt{v_B^2 + v_C^2}$$



Podemos então observar que a velocidade do barco e a velocidade da correnteza são perpendiculares entre si, e que a velocidade do barco  $\vec{v}_B$  não tem componente na direção de  $\vec{v}_C$ , ou seja, a correnteza não terá nenhuma influência no tempo que o barco gasta para atravessar o rio; haja ou não correnteza o tempo de travessia será o mesmo, pois o efeito da correnteza é unicamente o de deslocar o barco rio abaixo. Do mesmo modo, sendo nula a componente de  $\vec{v}_B$  na direção da correnteza, a velocidade do barco não terá influência no seu movimento rio abaixo. É essa independência de dois movimentos simultâneos e que constituem o princípio da independência dos movimentos de Galileu.

**01.** Entre as cidades A e B existem sempre correntes de ar que vão de A para B com uma velocidade de 50km/h. Um avião, voando em linha reta, com uma velocidade de 150km/h, em relação ao ar, demora 4h para ir de B até A. Qual a distância entre as duas cidades?

**Solução:**

O vento sopra de A para B. O avião voa de B para A. Como as velocidades têm sentidos contrários, a velocidade resultante do avião é:

$$v = 150 - 50 = 100\text{km/h}$$

O avião percorre a distância entre as duas cidades em 4h. Então:

$$S = S_0 + vt$$

$$S = 0 + 100 \times 4 = 400\text{km (a distância entre A e B).}$$

## Exercícios

**01.** (FEI) Um vagão está animado de velocidade cujo módulo é  $V$ , relativa ao solo. Um passageiro, situado no interior do vagão move-se com a mesma velocidade, em módulo, com relação ao vagão. Podemos afirmar que o módulo da velocidade do passageiro, relativa ao solo, é:

- a) certamente menor que  $V$ ;
- b) certamente igual a  $V$ ;
- c) certamente maior que  $V$ ;
- d) um valor qualquer dentro do intervalo fechado de 0 a  $2V$ ;
- e) n.d.a.

**02.** A lei de movimento de uma partícula, relativamente a um referencial cartesiano, é dada pelas equações  $x = 2,0t^2$  e  $y = 1,0t^2 + 1,0$  em unidades do SI. A trajetória da partícula é uma:

- a) circunferência
- b) elipse
- c) hipérbole
- d) parábola
- e) reta

**03.** (UNITAU) A trajetória descrita por um ponto material P e a equação horária da projeção horizontal de P, num sistema de coordenadas cartesiano ortogonal Oxy, expressas em unidades do sistema internacional, são respectivamente:  $y = 0,125x^2$  e  $x = 6,0t$ , onde  $x$  e  $y$  são coordenadas de P e  $t$  é tempo. A velocidade de P segundo Ox e a aceleração de P segundo Oy, em unidades do sistema internacional, têm densidades iguais a:

- a) 4,5 e 6,0
- b) 6,0 e 9,0
- c) 3,0 e 9,8
- d) 6,0 e 4,5
- e) 3,0 e 9,0

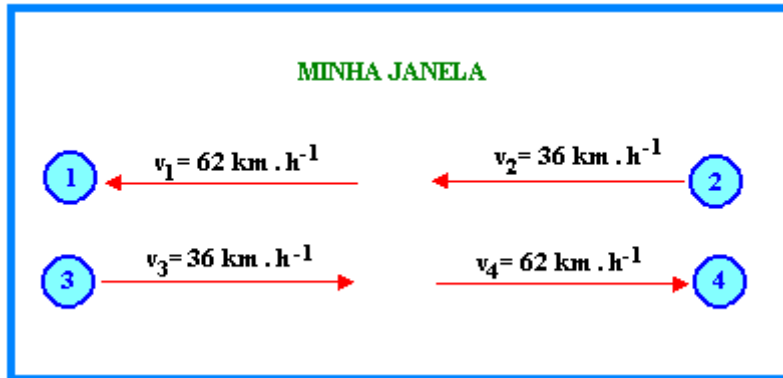
**04.** Um saveiro, com motor a toda potência, sobe o rio a 16 km/h e desce a 30 km/h, velocidades essas, medidas em relação às margens do rio. Sabe-se que tanto subindo como descendo, o saveiro tinha velocidade relativa de mesmo módulo, e as águas do rio tinham velocidade constante  $V$ . Nesse caso,  $V$ , em km/h é igual a:

- a) 7,0
- b) 10
- c) 14
- d) 20
- e) 28

**05.** Um homem rema um barco com velocidade de 5,00 km/h na ausência de correnteza. Quanto tempo ele gasta para remar 3,00 km rio abaixo e voltar ao ponto de partida num dia em que a velocidade da correnteza é de 1,0 km/h?

- a) 1,25 h
- b) 1,20 h
- c) 1,15 h
- d) 1,10 h
- e) 1,00 h

06. (VUNESP) Gotas de chuva que caem com velocidade  $v = 20 \text{ m/s}$ , são vistas através da minha vidraça formando um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical, vindo da esquerda para a direita. Quatro automóveis estão passando pela minha rua com velocidade de módulos e sentidos indicados. Qual dos motoristas vê, através do vidro lateral, a chuva caindo na vertical?



- 1
- 2
- 3
- 4
- nenhum deles vê a chuva na vertical.

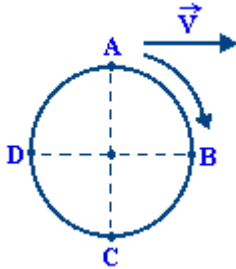
07. Um barco pode atravessar um rio de largura constante, de modo que o tempo de trajeto seja o mínimo possível. Para tanto:

- o barco deve ser disposto em relação à correnteza de modo que o percurso seja o mínimo possível;
- o barco deve ser disposto de modo que a sua velocidade em relação às margens seja a máxima possível;
- o barco deve ser disposto de modo que sua velocidade resultante em relação às margens seja perpendicular à correnteza;
- o barco deve ser disposto de modo que sua velocidade própria (velocidade relativa às águas) seja perpendicular à correnteza;
- n.d.a.

08. (SANTA CASA) Um automóvel percorre um trecho retilíneo de uma estrada mantendo constante sua velocidade escalar linear. O ponto de contato entre um pneu e a estrada:

- tem velocidade nula em relação à estrada;
- tem velocidade nula em relação ao automóvel;
- está em repouso em relação à qualquer ponto do pneu;
- executa movimento circular e uniforme em relação à estrada;
- tem a mesma velocidade linear do centro da roda, em relação à estrada.

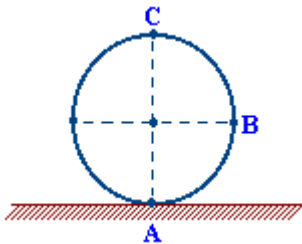
09. (UNIP) Considere um automóvel com velocidade constante em uma estrada reta em um plano horizontal. No pneu do automóvel estão desenhados quatro patinhos. Quando o automóvel passa diante de um observador parado à beira da estrada, este tira uma fotografia do pneu.



Na figura representamos o pneu no instante da fotografia e os quatro patinhos ocupam as posições A, B, C e D. A respeito da nitidez dos patinhos na foto podemos afirmar que:

- a) O patinho C é o mais nítido e o patinho A é menos nítido.
- b) Todos os patinhos são igualmente nítidos.
- c) Todos os patinhos têm nitidez diferente.
- d) O patinho A é o mais nítido.
- e) O patinho D é o menos nítido.

10. A figura mostra uma roda que rola sem deslizar sobre o solo plano e horizontal.



Se o eixo da roda se translada com velocidade constante de intensidade 50 m/s, que alternativa apresenta os valores mais próximos das intensidades das velocidades dos pontos A, B e C em relação ao solo, no instante considerado?

- |    | ponto A | ponto B | ponto C |
|----|---------|---------|---------|
| a) | 50 m/s  | 50 m/s  | 50 m/s  |
| b) | zero    | 70 m/s  | 100 m/s |
| c) | zero    | 50 m/s  | 100 m/s |
| d) | 25 m/s  | 30 m/s  | 50 m/s  |
| e) | 100 m/s | 100 m/s | 100 m/s |

Gabarito:

- |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 01 - D | 02 - E | 03 - B | 04 - A | 05 - A |
| 06 - C | 07 - D | 08 - A | 09 - A | 10 - B |